Ion CRĂCIUN

Departamentul de Matematică şi Informatică
Universitatea Tehnică ”Gheorghe Asachi” din Iaşi

MATEMATICI SPECIALE

LUCRĂRI DE VERIFICARE A CUNOŞTINŢELOR

IAŞI – **2013**

Cuprins

1

Lucrări de verificare a cunoştinţelor

Matematici speciale

1.1 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 1

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluţia sistemului

$$\begin{cases} x' - x + 2y &= 0, \\ x'' + 2y' &= 2t - \cos 2t \end{cases}$$

care satisface condiţiile iniţiale $x(0+) = 0$, $x'(0+) = -1$, $y(0+) = \dfrac{1}{2}$.

Răspuns. $x(t) = t^2 - \dfrac{1}{2}\sin 2t;\ y(t) = -t + \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{2}\cos 2t - \dfrac{1}{4}\sin 2t.$

2. Să se cerceteze dacă funcţia

$$w = \frac{x^2 + y^2 - 3x + 2 - iy}{x^2 + y^2 - 4x + 4}$$

este olomorfă şi să se aducă la forma $w = f(z),\ \ z \neq 2,\ \ z = x + iy.$

Răspuns. $w = \dfrac{z-1}{z-2}.$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 - 2x + 10} dx.$

Răspuns. $I = \dfrac{\pi}{3e^6}(\sin 2 + 3\cos 2).$

4. Să se afle transformata Fourier prin cosinus F_c a funcţiei $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ şi din rezultatul obţinut să se deducă relaţia $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \sin ux}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi u e^{-u}}{4}.$

Răspuns. $F_c(u) = \sqrt{2\pi}\dfrac{1+u}{4}e^{-u}$. Egalitatea se obţine derivând sub semnul integrală.

5. Se consideră funcţiile original $f(t) = e^t$ şi $g(t) = e^{-2t}$. Să se determine convoluţia $f * g$ în două moduri:

– calculând direct integrala care defineşte convoluţia;

– aplicând transformarea Laplace convoluţiei.

Răspuns. $(f * g)(t) = \dfrac{e^t - e^{-2t}}{3},\ t \geq 0.$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.2 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 2

1. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ştiind că:

$$u(x,y) \quad = \quad x^3 - 3xy^2 + 2xy - x, \qquad f(0) = i.$$

Răspuns. $v(x,y) = 3x^2y - x^2 - y^3 + y^2 - y + 1 \Longrightarrow f(z) = z^3 - iz^2 - z + i.$

2. Să se studieze comportarea seriei de puteri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 3^n}(z - 2i)^n.$$

Răspuns. Convergentă pe discul închis $|z - 2i| \leq 3$ şi divergentă în exterior.

3. Să se reprezinte printr–o serie Fourier funcţia periodică de perioadă $T = \pi$

$$f(t) = |\sin t|.$$

Răspuns.
$$|\sin t| = \frac{4}{\pi}\Big(\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1}\Big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Folosind transformarea Laplace să se determine soluţia ecuaţiei integrale

$$\int_0^t \sin(t - \tau)x(\tau)d\tau = t^2.$$

Indicaţie. Primul membru al ecuaţiei integrale este convoluţia a două funcţii.

Răspuns. $x(t) = 2 + t^2.$

5. Să se găsească punctele singulare de la distanţă finită şi comportarea în punctul de la infinit pentru funcţia $f(z) = \dfrac{z^7 - 3z^2}{z^2 - 6z + 9}$ şi apoi să se calculeze integrala $I = \displaystyle\int_{|z|=R} f(z)dz$, unde $R \neq 3$.

Răspuns. Punctul $z = 3$ este pol de ordin doi, iar $z = \infty$ pol de ordin cinci. Pentru $R < 3$ rezultă $I = 0$, iar pentru $R > 3$ găsim $I = 10170\pi i$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.3 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 3

1. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ştiind că:

$$\operatorname{Im} f = v(x,y) = e^x \sin y + \frac{y}{x^2+y^2}; \quad f(z_0) = 1, \quad \text{unde} \quad z_0 = 1.$$

Răspuns. $$f(z) = e^z - \frac{1}{z} + 2 - e.$$

2. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = \dfrac{1}{5 + 3\sin x}$.

Răspuns. $$f(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1}}\Big(\cos\frac{n\pi}{2}\cos nt + \sin\frac{n\pi}{2}\sin nt\Big).$$

3. Să se găsească punctele singulare de la distanţă finită şi comportarea în punctul de la infinit pentru $f(z) = \dfrac{2}{\sin^2 z}$.

Răspuns. $z = k\pi$, unde k este număr întreg, poli de ordin doi; $z = \infty$ punct singular esenţial neizolat (limită de poli).

4. Să se găsească dezvoltarea în serie Laurent în jurul punctului $z = \infty$ pentru

$$f(z) = \frac{z^{13}}{(z-2)^4(z^5+3)^2},$$

din rezultatul găsit să se precizeze $\operatorname{Rez}[f,\infty]$ şi apoi să se calculeze integrala

$$\int_C f(z)dz, \quad \text{unde} \quad z = x + iy \quad \text{şi} \quad C:\, 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0.$$

Răspuns. $$\operatorname{rez}[f,\infty] = -1, \ \int_C f(z)dz = 2\pi i.$$

5. Să se calculeze cu teorema reziduurilor integrala reală $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{(5+4\sin\theta)^2}d\theta$.

Răspuns. $$I = \pi/6.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.4 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 4

1. Folosind teorema reziduurilor calculaţi $I = \int_\Gamma \frac{e^z}{z(i-z)^3} dz$, unde Γ este cercul de rază $a \neq 1$ cu centrul în origine. Discuţie după $a > 0$.

   Răspuns. Pentru $a < 1 \Longrightarrow I = 2\pi i \,\text{Rez}\,[f; z_0 = 0] = -2\pi$. Pentru $a > 1 \Longrightarrow$
   $$I = 2\pi i \Big(\text{Rez}\,[f; z_0 = 0] + \text{Rez}\,[f; z_1 = i]\Big) = 2\pi[-1 + 2\sin 1 + \cos 1 + 2i(\sin 1 - \cos 1)].$$

2. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia
   $$f : [-\ell, \ell] \to I\!R,\ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru} \quad x \in [-\ell, 0] \\ x, & \text{pentru} \quad x \in [0, \ell]. \end{cases}$$

   Răspuns. $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{\ell}$; $a_0 = \frac{1}{8}$; $a_k = \frac{\ell\Big((-1)^k - 1\Big)}{\pi^2 k^2}$; $b_k = \frac{\ell}{\pi k}(-1)^k \Longrightarrow$
   $$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x, \quad x \in I\!R.$$

3. Să se afle raza de convergenţă R a seriei de puteri în complex $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$.

   Răspuns. $R = 27.$

4. Să se determine soluţia problemei
   $$\begin{cases} x' = x + y - 3e^t \\ y' = 3x - y + 5e^{3t} \end{cases} \qquad x(0+) = 5, \quad y(0+) = 3.$$

   Indicaţie. Eliminând y se ajunge la problema
   $$x'' - 4x = -6e^t + 5e^{3t}; \quad x(0+) = 5, \quad x'(0+) = 5,$$
   a cărei soluţie se determină utilizând transformarea Laplace.

   Răspuns.
   $$\begin{cases} x(t) & = & e^{2t} + e^{-2t} + 2e^t + e^{3t}, \\ y(t) & = & e^{2t} - 3e^{-2t} + 3e^t + 2e^{3t} \end{cases}$$

5. Să se scrie sub forma $a + ib$ numărul complex $i^{\sqrt{2}}$.

   Indicaţie. Se scrie numărul dat ca $i^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln i}$.

   Răspuns. $i^{\sqrt{2}} = \cos\sqrt{2}\Big(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\Big) + i\sin\sqrt{2}\Big(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\Big).$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.5 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 5

1. Folosind teorema reziduurilor calculaţi integrala $I = \int_\Gamma \frac{dz}{(z^2+9)^2}$, unde curba Γ este, pe rând, unul din cercurile:
$$\Gamma_1 : |z-2i| = 2; \quad \Gamma_2 : |z+2i| = 2; \quad \Gamma_3 : |z| = 4.$$
Răspuns. $\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{(z^2+9)^2} = \frac{\pi}{54}, \quad \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{(z^2+9)^2} = -\frac{\pi}{54}, \quad \int_{\Gamma_3} \frac{dz}{(z^2+9)^2} = 0.$

2. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia
$$f(x) = \frac{1-\alpha\cos x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}, \ |\alpha| < 1, \ \alpha \neq 0.$$
Indicaţie. Se alege ca interval $[\alpha, \alpha+T]$, intervalul $[-\pi, \pi]$.

Răspuns. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cos nx.$

3. Folosind transformarea Laplace determinaţi soluţia ecuaţiei integrale
$$x(t) - \int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = t.$$
Indicaţie. Observaţi întâi că ecuaţia are forma $e^t * x(t) = x(t) - t$, apoi aplicaţi transformarea Laplace.

Răspuns. $x(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{2t}, \ t \geq 0.$

4. Arătaţi că $z = \infty$ este punct ordinar pentru funcţia $f(z) = \ln \frac{z-a}{z-b}$.

Indicaţie. Se dezvoltă în jurul punctului $z = \infty$ funcţia $f'(z)$, se revine la $f(z)$ integrând seria termen cu termen în coroana infinită $|z| > \max(|a|, |b|)$, constanta de integrare fiind $C = i2k\pi$.

Răspuns. $z = \infty$ este punct ordinar pentru funcţia $f(z)$.

5. Să se calculeze suma S a seriei de numere complexe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 i^{2n} + n i^n + 1}{n!}$.

Răspuns. $S = e + i\, e^i.$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.6 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 6

1. Să se dezvolte în serie de puteri funcţia $f(z) = \dfrac{3z+2}{z(z-1)^2}$

$$a)\quad \text{în jurul punctului} \quad z_0 = 1;$$
$$b)\quad \text{în jurul punctului} \quad z_0 = 0.$$

Răspuns.
$$\begin{cases} a)\quad f(z) = \Big(\dfrac{3}{z-1} + \dfrac{5}{(z-1)^2}\Big)\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k; \\ b)\quad f(z) = \Big(3 + \dfrac{2}{z}\Big)\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\, z^{k-1}. \end{cases}$$

2. Utilizând teorema reziduurilor să se arate că

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z^2 - \pi^2} dz = 0,$$

unde Γ este cercul de rază arbitrară $R > 0$ cu centrul în origine.

Indicaţie. Se iau cazurile $R < \pi$, $R = \pi$, $R > \pi$.

3. Folosind transformarea Fourier să se rezolve ecuaţia integrală

$$\int_0^{\infty} \varphi(u)\, \cos xu\, du = \frac{1}{x^2+1}.$$

Răspuns. $\varphi(u) = e^{-u}.$

4. Să se reprezinte printr–o integrală Fourier funcţia **factorul discontinuu al lui Dirichlet**

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{pentru} \quad |t| < a, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{pentru} \quad t = \pm a, \qquad a > 0. \\ 0, & \text{pentru} \quad |t| > a, \end{cases}$$

Răspuns. $f(t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin au \cos ut}{u} du.$

5. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{13 + 12\sin\theta}$.

Răspuns. $I = \dfrac{2\pi}{5}.$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.7 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 7

1. Să se rezolve ecuaţia
$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = -1.$$
Răspuns. $z_k = -i\,\mathrm{tg}\,\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$, unde $k = \overline{0, n-1}$.

2. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ştiind că:
$$v(x,y) = e^x(x\sin y + y\cos y) + x + y; \quad f(0) = 0.$$
Răspuns. $f(z) = (1+i)z + z\,e^z$.

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos 2x}{x^2 - 2x + 10}dx.$$
Răspuns. $I = \dfrac{\cos 2 - 3\sin 2}{3e^6}$.

4. Să se determine funcţia $f(t)$ care satisface ecuaţia integrală Fourier
$$\int_0^{\infty} f(t)\cos tx\,dt = \frac{1}{x^2+a^2}, \quad x \geq 0,$$
unde a este o constantă pozitivă.
Răspuns. $f(t) = \dfrac{1}{a}e^{-at}$.

5. Să se găsească funcţia original $f(t)$ dacă imaginea sa este
$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 6p - 7}.$$
Răspuns. $f(t) = \dfrac{1}{4}e^{-3t}\sinh 4t = \dfrac{1}{8}\Big(e^t - e^{-7t}\Big)$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la acest test. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.8 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 8

1. Utilizând transformarea Laplace rezolvaţi problema cu valoare iniţială

$$x' + 2x = 26\sin 3t, \quad x(0+) = 3.$$

Răspuns. $x(t) = 9e^{-2t} - 6\cos 3t + 4\sin 3t,$ unde $t \in [0, \infty).$

2. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ştiind că:

$$u(x,y) = \varphi(ax + by), \quad a,\, b \in \mathbb{R}^*, \quad \text{şi} \quad f(0) = 2i.$$

Indicaţie. Se impune condiţia ca funcţia $u(x,y)$ să fie armonică şi se găseşte $u(x,y) = \alpha(ax + by) + \beta$, unde α şi β sunt constante reale arbitrare.

Răspuns. $f(z) = \alpha(a - ib)z + 2i.$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$$

Răspuns. $I = \pi\sqrt{2}.$

4. Să se dezvolte în serie Taylor funcţia $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ într–o vecinătate a lui $z_0 = 0$. Să studieze natura punctului de la infinit şi, din acest rezultat, să se deducă $\displaystyle\int_{|z|=R<1} f(z)dz$ şi $\displaystyle\int_{|z|=R>1} f(z)dz.$

Răspuns. Pentru $|z| < 1$ are loc dezvoltarea

$$f(z) = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}.$$

5. Să se găsească $|z|,$ $\operatorname{Re} z$ şi $\operatorname{Im} z$ pentru numărul complex $z = \dfrac{(3+4i)(1-i)}{2i}$.

Răspuns. $|z| = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}$, şi $\operatorname{Im} z = -\dfrac{7}{2}.$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.9 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 9

1. Să se găsească punctele din planul complex în care funcţia

$$f(z) \;=\; z^2 + i\,\overline{z}^2 + 4\,z + 6\,\overline{z} + 8$$

este monogenă. În punctele găsite, să se calculeze derivata funcţiei.

Răspuns. $z_0 = -3i$ şi $f'(z_0) = 4 - 6i.$

2. Să se determine raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$ şi să se arate că pe discul de convergenţă $|z| < 1$ are loc egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Răspuns. $R = 1.$ Egalitatea se deduce derivând în $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}, \quad a > 0.$$

Răspuns. $I = \frac{\pi}{2a^3}.$

4. Folosind transformarea Laplace să se determine soluţia problemei

$$x'' + 3x' + 2x = e^{-t}, \quad x(0+) = x'(0+) = 0.$$

Răspuns. $x(t) = e^{-2t} + (t-1)e^{-t}, \quad t \geq 0.$

5. Să se determine imaginea $F(p)$ prin transformarea Laplace a funcţiei

$$f(t) = e^{-\lambda t}\cos(\omega\, t + \varphi).$$

Răspuns. $F(p) = \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2} \cdot e^{\frac{\varphi(p+\lambda)}{\omega^2}}.$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la acest test. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.10 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 10

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluţia problemei

$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = t + 1, \quad x(0+) = 1,\, x'(0+) = 0.$$

Indicaţie. Se aplică transformarea Laplace. Se găseşte

$$X(p) = \frac{p^3 + 3p^2 + p + 1}{p^2(p+1)(p+2)}.$$

Se descompune $X(p)$ în fracţii simple şi se determină $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(p)]$.

Răspuns. $x(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + 2e^{-t} - \frac{3}{4}e^{-2t}$, unde $t \geq 0$.

2. Pentru funcţia $f(z) = \frac{z-1}{z-2}$ să se scrie seriile Taylor în punctele $z = 0$ şi $z = i$.

Indicaţie. Punem, pe rând, $f(z)$ în formele $f(z) = 1 + \frac{1}{z-2}$ şi respectiv $f(z) = 1 + \frac{1}{z - i + i - 2}$.

Răspuns. $f(z) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$, cu $R = 2$, şi $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(i-2)^{n+1}}$.

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2} dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Răspuns. $I = \frac{\pi}{4b(a+b)^2}$.

4. Să se arate că nu există funcţia olomorfă $f(z)$ a cărei parte reală $u(x, y)$ este

$$u(x, y) = e^x(\cos y - y \sin x)$$

Indicaţie. Se arată că funcţia $u(x, y)$ nu este armonică.

5. Folosind transformarea Laplace să se rezolve ecuaţia integrală

$$x(t) + 2\int_0^t x(\tau)\, d\tau = 3e^t + 2t.$$

Răspuns. $x(t) = 1 + e^t + e^{-2t}$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.11 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 11

1. Să se găsească punctele singulare de la distanţă finită ale funcţiei de mai jos cercetând şi comportarea sa în punctul de la infinit
$$f(z) = e^{2z}\ln\frac{z-i}{z+i}.$$
Răspuns. $z=\pm i$ puncte critice logaritmice; $z=\infty$ punct singular esenţial izolat.

2. Fie funcţia complexă
$$f(z) = \frac{3z^2-12z+11}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$
Să se dezvolte $f(z)$ în serie de puteri ale lui z pe domeniul $1<|z|<2$.
Răspuns. $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\Big)z^n.$$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală
$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2-6x+10)^2}dx.$$
Răspuns. $$I=\frac{3\pi}{2}.$$

4. Folosind transformarea Laplace să se determine soluţia problemei
$$\begin{cases} x''+y'+3x &= 15\,e^{-t}\\ y''-4x'+3y &= 15\sin 2t,\end{cases}\qquad \begin{cases} x(0+)=35, & y(0+)=27,\\ x'(0+)=-48, & y'(0+)=-57.\end{cases}$$
Răspuns. $$\begin{cases} x=30\cos t-15\sin 3t+3e^{-t}+2\cos 2t\\ y=30\cos 3t-60\sin t-3e^{-t}+\sin 2t.\end{cases}$$

5. Folosind transformarea Fourier să se rezolve ecuaţia integrală
$$\int_0^{\infty}g(u)\cos tu du=\begin{cases}1-t, & \text{pentru}\quad 0<t\le 1\\ 0, & \text{pentru}\quad t>1.\end{cases}$$
Răspuns. $$g(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-t)\cos ut dt=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos u}{u^2},\quad u\in[0\infty).$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.12 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 12

1. Considerăm problema cu valori iniţiale
$$ax'' + bx' + cx = f(t), \quad x(0+) = x'(0+) = 0, \quad t > 0,$$
pentru care funcţia de transfer a sistemului este $\Phi(p) = \dfrac{1}{2p^2 + 5p + 2}$.
   (a) Să se determine constantele a, b şi c.
   (b) Dacă $f(t) = e^{-t}$, determinaţi $x(t)$ cu ajutorul transformării Laplace.

   Indicaţie. Funcţia de transfer a sistemului este $\Phi(p) = \dfrac{X(p)}{F(p)}$, unde $X(p) = \mathcal{L}[x(t)]$ şi $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$.

   Răspuns. $a = c = 2, \quad b = 5, \quad x(t) = -e^{-t} + \dfrac{2}{3}e^{-t/2} + \dfrac{1}{3}e^{-2t}, \quad t \geq 0.$

2. Să se determine funcţia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ olomorfă în întreg planul complex la distanţă finită ştiind că:
$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 4xy; \quad f(0) = 0.$$
   Răspuns. $f(z) = (1 - 2i)z^2.$

3. Dezvoltaţi în serie Laurent funcţia $f(z) = \dfrac{z}{(z + 1)(z - 1)^3}$ în $|z - 1| > 2$.

   Răspuns. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^3}\Big[\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}\Big]$

4. Folosind teorema reziduurilor să se determine valoarea integralei
$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 16)^2}dx.$$
   Răspuns. $I = \dfrac{9\pi}{128}.$

5. Demonstraţi că funcţia complexă $f(z) = e^{1/z}$ are în $z_0 = 0$ un punct singular esenţial izolat.
Indicaţie. Se foloseşte dezvoltarea Laurent în jurul originii a funcţiei
$$f(z) = e^{1/z}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.13 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 13

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluţia problemei

$$x'' - 9x' + 20x = t^2 e^{4t}, \quad x(0+) = -1, \quad x'(0+) = -3.$$

Răspuns. $x(t) = -4e^{4t} + 3e^{5t} - \dfrac{1}{3}\Big(t^3 + 3t^2 + 6t\Big)e^{4t}.$

2. Să se afle mulţimea de convergenţă a seriei de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(n+1)(n+2)}(z-2)^n.$$

Răspuns. Mulţimea de convergenţă este $B_2\Big(2, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-2| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}\}.$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 - 4x + 5)^2} dx.$$

Răspuns. $I = \pi.$

4. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = \dfrac{1-a^2}{1 - 2a\cos x + a^2}$, $x \in (-\pi, +\pi)$, unde a este o constantă în modul subunitară.

   Indicaţie. Coeficienţii se calculează cu teorema reziduurilor; a_n şi b_n se găsesc simultan calculând $a_n + ib_n$.

   Răspuns. $f(x) = 1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx, \ \ x \in \mathbb{R}.$

5. Să se calculeze toate valorile posibile pe care le poate lua integrala $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z(z^2-1)}$ pentru diferite poziţii ale curbei închise C, presupunând că aceste curbe nu trec prin punctele $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,-1)$.

   Indicaţie. Se consideră curbe închise care conţin unul, două, trei sau nici unul din punctele singulare.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la acest test. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.14 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 14

1. Folosind transformarea Laplace să se rezolve problema lui Cauchy pentru sistemul

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + y + \cos t, \end{cases}$$

cu datele iniţiale: $x(0+) = 0$; $y(0+) = 0$.

Răspuns.
$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{3}} e^{t/2} \sin \dfrac{t\sqrt{3}}{2} - \sin t \\ y = e^{t/2}\Big(\cos \dfrac{t\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \sin \dfrac{t\sqrt{3}}{2}\Big) - \cos t. \end{cases}$$

2. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ pentru care se cunoaşte:

$$u(x, y) = \frac{x}{2} \ln(x^2 + y^2) - y \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \quad f(1) = 0.$$

Răspuns. $f(z) = z \ln z$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3}, \quad a > 0.$$

Răspuns. $I = \dfrac{3\pi}{8a^5}.$

4. Să se calculeze transformata prin cosinus a funcţiei $f(x) = e^{-2|x|} \cos x$.

Răspuns. $F_c(u) = \dfrac{2}{4 + (1 + u)^2} + \dfrac{2}{4 + (1 - u)^2}.$

5. Să se determine seria Taylor în vecinătatea punctului $z_0 = 4$ a funcţiei

$$f(z) = \frac{z + 3}{z^2 - 8z + 15}.$$

Indicaţie. Se notează $z - 4 = u$.

Răspuns. $f(z) = -(7 + u)(1 + u^2 + u^4 + ... + u^{2n} + ...)$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la acest test. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.15 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 15

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluţia problemei

$$tx''(t) + 2x'(t) = t - 1, \quad x(0+) = 0.$$

Răspuns. $$x(t) = \frac{t^2}{6} - \frac{t}{2}.$$

2. Să se demonstreze că dacă funcţia $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ este olomorfă pe un domeniu D din planul complex, atunci funcţia reală de două variabile reale

$$\varphi(x,y) = \left(e^{v(x,y)} + e^{-v(x,y)}\right) \sin u(x,y)$$

este armonică pe D.

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Răspuns. $$I = \frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

4. Să se reprezinte printr–o integrală Fourier funcţia

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \le n\pi, \\ 0, & |t| > n\pi, \end{cases}$$

n fiind un număr natural, $n \ge 1$.

Răspuns. $$f(t) = \frac{2(-1)^n}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin n\pi u \sin tu}{u^2 - 1} du.$$

5. Să se găsească domeniul de convergenţă pentru seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{(z-1)^n}.$$

Răspuns. $$|z-1| > e.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.16 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 16

1. Să se găsească imaginea dreptunghiului cu vârfurile în punctele 0, 1, $1+2i$, şi $2i$ prin transformarea $w=(1+i)z+2-3i$.

   Indicaţie. Deoarece w se scrie $w=\sqrt{2}\Big(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\Big)z+(2-3i)=\sqrt{2}e^{i\pi/4}z+(2-3i)$, imaginea dreptunghiului se obţine efectând o rotaţie, urmată de o omotetie şi apoi de o translaţie.

2. Folosind transformarea Laplace să se determine soluţia problemei

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x, \end{cases} \qquad x(0+)=1,\quad y(0+)=3.$$

   Răspuns. $\begin{cases} x(t) &= 2e^{t}-e^{-t} \\ y(t) &= 2e^{t}+e^{-t}. \end{cases}$

3. Se dă funcţia $f(z)=\dfrac{z^3+1}{z^3(z-i)}$. Să se calculeze reziduurile în punctele ei singulare, inclusiv în punctul $z=\infty$ şi să se afle valoarea integralei $\displaystyle\int_{|z|}=Rf(z)dz$, unde $R\neq 1$.

   Răspuns. $\text{Rez}\,[f,z_1=0]=-i,\ \ \text{Rez}\,[f,z_2=i]=1+i,\ \ \text{Rez}\,[f,z_3=\infty]=-1.$

4. Să se calculeze soluţia ecuaţiei integrale

$$f(t)=\sin t+\frac{1}{2}\int_0^t(t-\tau)^2f(\tau)d\tau$$

   folosind transformarea Laplace.

   Răspuns. $f(t)=\dfrac{1}{6}e^{t}+\dfrac{1}{2}\Big(\cos t+\sin t\Big)-\dfrac{2}{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t.$

5. Să se pună sub forma $a+ib$ numărul complex $z=(1+i)^{1-i}$.

   Răspuns. $z=\sqrt{2}e^{\pi/4+2k\pi}\Big(\cos\left(\pi/4-\ln\sqrt{2}\right)+\sin\left(\pi/4-\ln\sqrt{2}\right)\Big).$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.17 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 17

1. Folosiţi transformarea Laplace pentru a găsi soluţia ecuaţiei integrale

$$t * x(t) = t^2(1 - e^{-t}).$$

Răspuns. $x(t) = 2 + (t^2 + 16t + 2)e^t.$

2. Să se determine punctele $z = x + iy$ în care funcţia complexă de variabilă complexă

$$f(z) = x^2 - 4xy + y + i(3x - y^2)$$

este monogenă şi să se calculeze derivata funcţiei în punctele găsite.

Răspuns. $z_0 = 1 + i, \;\; f'(z_0) = -2 + 3i.$

3. Să se determine reziduurile funcţiei $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-1)^3}$ şi să se calculeze $\displaystyle\int_{|z|=R} f(z)dz$, unde $R \neq 1$.

Răspuns. $\text{Rez}\,[f, -1] = \dfrac{1}{8}$ şi $\text{Rez}\,[f, 1] = -\dfrac{1}{8}.$

4. Să se calculeze integrala improprie $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx.$

Răspuns. $I = \pi/8.$

5. Se cere transformata Laplace $F(p)$ a funcţiei original $f(t) = te^{-3t} \sin 5t.$

Răspuns. $F(p) = \dfrac{10(p+3)}{(p^2 + 6p + 34)^2}.$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.18 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 18

1. Să se determine regiunile planului complex unde funcţia complexă de variabilă complexă
$$f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$$
este olomorfă. În fiecare regiune găsită, să se determine derivata funcţiei $f(z)$.

2. Să se calculeze integrala complexă
$$I = \int_C ze^z\, dz,$$
unde C este o curbă netedă pe porţiuni oarecare care uneşte originea cu $z = \frac{\pi}{2}i$. *Răspuns.* $I = 1 - \frac{\pi}{2} - i$.

3. Să se calculeze imaginea $F(p)$ a funcţiei original $f(t) = (t^3 + t^2 + t + 1)e^t$.

   Răspuns. $$F(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{2}{(p-1)^3} + \frac{6}{(p-1)^4}.$$

4. Folosind transformarea Laplace să se rezolve ecuaţia integro–diferenţială
$$x(t) + x'(t) - 2\int_0^t x(\tau)\sin(t-\tau)d\tau = \cos t + \sinh t$$
cu condiţia $x(0+) = 1$.

   Răspuns. $x(t) = \cosh t.$

5. Să se arate că are loc egalitatea
$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}dx = \frac{\pi(be^{-ac} - ce^{-ab})}{2bc(b^2-c^2)}, \quad b>0, \quad c>0.$$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la acest test. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.19 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 19

1. Folosind transformarea Laplace, eventual combinată cu metoda eliminării, să se determine soluţia sistemului
$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$
care satisface condiţiile iniţiale $x_1(0+) = 1$, $x_2(0+) = -3$.

Răspuns.
$$\begin{cases} x_1(t) &= 2e^t - e^{3t} \\ x_2(t) &= -2e^t - e^{3t}. \end{cases}$$

2. Să se rezolve problema cu valoare iniţială
$$x' - x = \int_0^t (t-s)e^s ds, \quad x(0+) = -1.$$
Indicaţie. Membrul doi al ecuaţiei diferenţiale este convoluţia $t * e^t$. Se aplică transformarea Laplace.

Răspuns. $x(t) = 2 + t(t-3)e^t,\ t \geq 0.$

3. Să se determine punctele z în care funcţia complexă
$$f(z) = z^2 + 2z\overline{z} - 2\overline{z}^2 + 3z + 2\overline{z}, \quad z = x + iy, \quad \overline{z} = x - iy$$
este monogenă şi să se calculeze $f'(z)$ în punctele determinate.

Răspuns. $z_0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{6},\ f'(z_0) = 4 - i.$

4. Să se calculeze integrala $I = \displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{1+z^2} \sin\frac{\pi}{z}\, dz$, unde Γ este o elipsă de ecuaţie $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, în următoarele două cazuri: $0 < b < 1;\ b > 1.$

Răspuns. $b < 1 \Longrightarrow I = 2\pi i \sinh \pi;\ \ b > 1 \Longrightarrow I = 0.$

5. Să se dezvolte în serie Laurent funcţia
$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$
în coroana circulară $0 < |z| < 1$.

Răspuns. $f(z) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\Big) z^n.$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.20 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 20

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluţia problemei

$$x^{(4)} + 2x'' + x = 0, \quad x(0+) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0+) = 0, \quad x'''(0+) = 0.$$

Răspuns. $x(t) = \cos t + \dfrac{1}{2} t \sin t.$

2. Să se calculeze integrala complexă $I = \displaystyle\int_C \frac{e^{\pi z}}{z(z-2i)}\, dz,$ unde conturul C este cercul $|z - 3i| = r,$ cu raza diferită de 1 şi de $3,$ parcurs în sens direct trigonometric. Discuţie după $r.$

Răspuns. $r < 1 \Longrightarrow I = 0; \quad 1 < r < 3 \Longrightarrow I = \pi; \quad r > 3 \Longrightarrow I = 0.$

3. Folosind formulele integrale ale lui Cauchy să se calculeze

$$\int_C \frac{z}{(z-1)^2(z^2+4)}\, dz,$$

unde conturul C este cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0,$ parcurs în sens direct trigonometric.

Răspuns. $I = \dfrac{-4+3i}{25}\pi.$

4. Să se găsească imaginea domeniului $y > 1$ din planul complex prin transformarea $w = (1-i)z.$

Indicaţie. Se scrie $z = x + iy,\ w = u + iv$ şi se determină $u = u(x,y),\ v = v(x,y).$

Răspuns. Imaginea domeniului este $u + v > 2.$

5. Să se dezvolte după puterile lui z funcţia

$$f(z) = \frac{3z^2 - 12z + 11}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6},$$

în coroana circulară cu centrul în origine $1 < |z| < 2.$

Indicaţie. Se descompune funcţia $f(z)$ în fracţii simple.

Răspuns. $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\Big) z^n.$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.21 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 21

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluţia problemei

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = z(t), \qquad x(0+) = y(0+) = z(0+) = 1. \\ z'(t) = x(t), \end{cases}$$

Răspuns. $x(t) = y(t) = z(t) = e^t.$

2. Să se arate că are loc egalitatea

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}dx = \frac{\pi(e^{-ac}-e^{-ab})}{2(b^2-c^2)}, \quad b>0, \quad c>0.$$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)^2}dx.$$

Răspuns. $I = \dfrac{\pi}{32}.$

4. Se cere dezvoltarea funcţiei $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-1)^3}$ în serie Laurent în jurul punctului $z_0 = 1$ şi să se precizeze apoi reziduul funcţiei în acest punct.

Răspuns. $\text{Rez}\,[f, z_0 = 1] = -\dfrac{1}{8}.$

5. Să se reprezinte printr–o integrală Fourier funcţia

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru} \quad |t| \geq 1 \\ -1, & \text{pentru} \quad t \in (-a, 0) \\ 1, & \text{pentru} \quad t \in (0, a), \end{cases}$$

care ia valorile $f(0) = 0,\ f(-a) = -\dfrac{1}{2},\ f(a) = \dfrac{1}{2}.$

Răspuns. $f(t) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin tu}{u} \sin^2 \frac{au}{2}\, du.$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.22 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 22

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluţia problemei

$$\begin{cases} x' + y - z &= 0 \\ y' - z &= 0 \\ z' + x - z &= \cos t, \end{cases} \qquad x(0+) = y(0+) = z(0+) = 0.$$

Răspuns.
$$\begin{cases} 2x(t = t\sin t, \\ 4y(t) = e^t - (t+1)\cos t + t\sin t, \\ 4z(t) = e^t + (t-1)\cos t + (t+2)\sin t. \end{cases}$$

2. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = \dfrac{16\sin^2 x}{(5+4\sin x)^2}$.

Răspuns. $$f(x) = \frac{8}{3} + \frac{8}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}}(5-3n)\cos nx, \quad x \in I\!R.$$

3. Se cere transformarea Laplace a funcţiei original $f(t) = e^{-3t}\sin 5t$.

Răspuns. $$F(p) = \frac{5}{(p+3)^2+25} = \frac{5}{p^2+6p+34}.$$

4. Să se calculeze $I = \displaystyle\int_{[a,b]} \overline{z}dz$, unde $a = 1+i$ şi $b = 2i$. Se păstrează valoarea integralei dacă se integrează pe o altă curbă care uneşte punctele a şi b?

Răspuns. $I = 0$. Răspunsul este **nu** şi trebuie justificat.

5. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(17+8\cos x)^2}dx.$$

Răspuns. $$I = -\frac{32\pi}{15^3}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.23 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 23

1. Să se găsească numerele complexe z care verifică simultan egalităţile:

$$\Big|\frac{z-12}{z-8i}\Big| = \frac{5}{3}; \quad \Big|\frac{z-4}{z-8}\Big| = 1.$$

Indicaţie. Cele două ecuaţii sunt echivalente cu cele obţinute prin ridicarea la pătrat. Se ţine apoi cont de faptul că $|f(z)|^2 = f(z)\cdot\overline{f(z)}$.

Răspuns. $z_1 = 6+17i$ şi $z_2 = 6+8i$.

2. Folosind eventual metoda eliminării şi aplicând transformarea Laplace să se determine soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale liniare

$$\begin{cases} y_1' &= -y_2+y_3 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= -y_1+y_3, \end{cases}$$

care satisface condiţiile iniţiale $y_1(0+)=1$, $y_2(0+)=1$, şi $y_3(0+)=2$.

Răspuns.

$$\begin{cases} y_1(t) = \cos t + \sin t, \\ y_2(t) = e^t + \sin t, \\ y_3(t) = e^t + \cos t. \end{cases}$$

3. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia

$$f(x) = \frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x + a^2}, \quad |a|<1.$$

Răspuns. $f(x) = a + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{n+1}\cos nx.$

4. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ ştiind că:

$$v(x,y) = y - \frac{y}{x^2+y^2}; \quad f(1)=0.$$

Răspuns. $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$, cunoscută sub numele de *transformarea lui Jukowski*.

5. Să se arate că dacă $F(u)$ şi $G(u)$ sunt transformatele Fourier ale funcţiilor $f(t)$ şi $g(t)$, atunci

$$(f\star g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)G(u)e^{iut}du.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.24 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 24

1. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ştiind că:

$$v(x,y) = 3x^2y + 6xy^2 - 2x^3 - y^3; \quad f(0) = 0.$$

Răspuns. $f(z) = (1-2i)z^3.$

2. Să se calculeze reziduurile funcţiei $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^3(z^2+1)}$ în punctele ei singulare. Să se găsească apoi toate valorile integralei $\displaystyle\int_{|z|=R} f(z)dz$, unde $R \neq 1$.

Răspuns. $\text{Rez}\,[f,1] = \dfrac{1}{4}$, $\text{Rez}\,[f,i] = -\dfrac{1+i}{8}$, $\text{Rez}\,[f,-i] = \dfrac{-1+i}{8}$.

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala

$$I = \int_C \frac{z^{100}e^{i\pi z}}{z^2+1}dz,$$

unde conturul C are ecuaţia $4x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Răspuns. $I = -2\pi\cosh\pi.$

4. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(t)$ de perioadă π definită pe intervalul $(0,\pi)$ prin $f(t) = e^{-at}$, unde $a > 0$ este o constantă.

Răspuns. $f(t) = \dfrac{1-e^{-a\pi}}{\pi}\Big(\dfrac{1}{a} + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{a\cos 2kt + 2k\sin 2kt}{a^2+4k^2}\Big).$

5. Să se calculeze $I = \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x^2}{x}dx$ aplicând definiţia transformatei Laplace funcţiei

$$f(t) = \int_0^{\infty}\frac{\sin tx^2}{x}dx.$$

Răspuns. $I = \dfrac{\pi}{4}.$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.25 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 25

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluţia ecuaţiei integrale
$$x(t)+2\int_0^t x(u)du=3e^t+2t.$$
Răspuns. $$x(t)=1+e^t+e^{-2t}.$$

2. Să se determine rădăcinile ecuaţiei $z^8+i=0$.
Răspuns. $$z_k=\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{8}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{8},\quad k=\overline{0,7}.$$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala
$$I=\int_C\frac{zdz}{(z^2-1)^2(z^2+1)},$$
unde C este curba de ecuaţie $x^2+y^2-2x-2=0$.
Răspuns. $$I=\frac{\pi}{4}i.$$

4. Să se dezvolte funcţia $f(z)=(z^2+z+2)\cos(z+i)$ după puterile lui $z-i$.
Indicaţie. Fiecare z se scrie ca $(z-i)+i$.
Răspuns. $f(z)=\Big(2+(2i+1)(z-i)+(z-i)^2\Big)\Big(\cosh 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-i)^{2n}-i\sinh 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-i)^{2n+1}\Big).$

5. Aplicând definiţia transformării Laplace funcţiei $f(t)=\int_0^{\infty}\frac{x\sin tx}{1+x^2}dx$ să se calculeze valorile integralelor
$$I_1=\int_0^{\infty}\frac{x\sin tx}{1+x^2}dx,\quad I_2=\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx.$$
Răspuns. $$I_1=\frac{\pi}{2e^t},\quad I_2=\frac{\pi}{2e}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.26 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 26

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$x'' - x' - 2x = 2(1+t-t^2)e^t,$$

care satisface condiţiile iniţiale $x(0+) = 1$ şi $x'(0+) = 2$.

Răspuns. $$x(t) = e^{2t} + t^2 e^t.$$

2. Să se determine forma complexă a seriei Fourier pentru funcţia

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad x \in (0,\pi), \\ -1, & \text{dacă} \quad x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Răspuns. $$f(x) = \frac{2}{\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{i(2n+1)x}}{2n+1}.$$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala complexă

$$I = \int_{|z|=3/2}\frac{z^3\cdot e^z}{(z-1)^2(z^2+iz+2)}dz.$$

Răspuns. $$I = \pi\Big(\frac{18e}{25} + \frac{\cos 1}{3} + i\Big(\frac{49e}{25} + \frac{\sin 1}{3}\Big)\Big).$$

4. Să se dezvolte în serie de puteri în vecinătatea punctului $z_0 = 3$ funcţia

$$f(z) = \frac{z(z^2+1) - 4(z^2-1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

şi să se precizeze apoi natura punctului z_0 pentru funcţia $f(z)$.

Indicaţie. Se descompune funcţia $f(z)$ în fracţii simple.

Răspuns. $$f(z) = -\frac{1}{z-3} + \frac{7}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(2 + \frac{1}{2^{n+1}}\Big)(z-3)^n.$$

5. Să se găsească mulţimea de convergenţă a seriei Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} 3^n (z-2)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{5^n}.$$

Răspuns. $$\frac{1}{3} < |z-2| < 5.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.27 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 27

1. Să se arate că ecuaţia
$$z \cdot \overline{z} + \overline{A}z + A\overline{z} + B = 0,$$
unde $B \in I\!\!R$ şi $B < |A|^2$, reprezintă ecuaţia unui cerc şi reciproc, ecuaţia oricărui cerc poate fi scrisă sub forma de mai sus.

   Indicaţie: Pentru reciprocă se ţine cont de faptul că $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ şi $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

2. Să se rezolve ecuaţia integrală de tip Volterra
$$x(t) = \cos t + \int_0^t e^{t-\tau}x(\tau)d\tau.$$
Răspuns. $$x(t) = \frac{3}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t + \frac{2}{5}e^{2t}.$$

3. Să se dezvolte în serie de puteri într–o vecinătate a punctului $z_0 = 0$ funcţia
$$f(z) = \frac{z(z^2+1) - 4(z^2-1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$
şi să se precizeze apoi natura punctului z_0 pentru funcţia $f(z)$.

   Indicaţie. Se descompune funcţia $f(z)$ în fracţii simple.

   Răspuns. $$f(z) = -\frac{2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty}\Big(1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\Big)z^n.$$

4. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala
$$I = \int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 x}{5 + 4\cos x}dz.$$
Răspuns. $$I = \pi/4.$$

5. Să se determine seria Laurent a ramurii principale a funcţiei complexe de variabilă complexă $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ în coroana circulară $1 < |z| < \infty$.

   Răspuns. $$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{1}{z^{2n+1}}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.28 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 28

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi, liniar şi omogen
$$\begin{cases} y_1' = -9y_1 - 12y_2 - 5y_3, \\ y_2' = 5y_1 + 6y_2 + 3y_3, \\ y_3' = y_1 + 4y_2 + y_3, \end{cases}$$
care satisface condiţiile iniţiale: $y_1(0+) = -1$; $y_2(0+) = 1$; $y_3(0+) = -1$.

   Indicaţie. Utilizând metoda eliminării, se ajunge la problema
$$y_1''' + 2y_1'' - 4y_1' - 8y_1 = 0, \quad y_1(0+) = -1, \quad y_1'(0+) = 2, \quad y_1''(0+) = -4,$$
care se rezolvă utilizn̂d transformarea Laplace.

   Răspuns. $y_1(t) = -e^{-2t}$, $y_2(t) = e^{-2t}$, $y_3(t) = -e^{-2t}$.

2. Se consideră ecuaţia $\Big(\dfrac{1+iz}{1-iz}\Big)^n = a + ib, \quad n \in I\!N, \quad a, b \in I\!R.$ Să se stabilească în ce condiţii ecuaţia are soluţii şi apoi să se rezolve.

   Răspuns. $a^2 + b^2 = 1, \quad z_k = \mathrm{tg}\Big(\dfrac{\theta + 2k\pi}{2n}\Big), \quad k = \overline{0, n-1},$ unde θ este argumentul numărului complex $a + bi$.

3. Să se arate că dacă $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ este olomorfă într–un domeniu D, atunci funcţia $\psi(z) = U(x,y) + iV(x,y)$, unde
$$U(x,y) = e^{v(x,y)} \cos u(x,y), \quad V(x,y) = -e^{v(x,y)} \sin u(x,y),$$
este olomorfă pe D.

4. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$$

   Răspuns. $I = \dfrac{5\pi}{12}$.

5. Dacă $X(z) = z \sin \dfrac{1}{z}$ este transformata Z a şirului $(x_n)_{n \geq 0}$, să se afle acest şir.

   Răspuns. $x_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{2(n+1)!}$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.29 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 29

1. Determinaţi soluţia problemei

$$x'' - 5x' + 6x = e^{3t}, \quad x(0+) = 1, \quad x'(0+) = -1$$

folosind transformarea Laplace.

Răspuns. $x(t) = (t-4)e^{3t} + 5e^{2t}.$

2. Să se reprezinte printr–o serie Fourier funcţia $f(t)$, periodică de perioadă 2π

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru} \quad t \in (0, \pi) \\ -1, & \text{pentru} \quad t \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Răspuns. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}\Big(1 - (-1)^k\Big) \cos kx.$

3. Să se dezvolte în serie de puteri într–o vecinătate a punctului $z_0 = 2$ funcţia

$$f(z) = \frac{z(z^2+1) - 4(z^2-1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

şi să se precizeze apoi natura punctului z_0 pentru funcţia $f(z)$.

Indicaţie. Se descompune funcţia $f(z)$ în fracţii simple şi se pune în evidenţă binomul $(z-2)$.

Răspuns. $f(z) = \frac{2}{z-2} + 3 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(z-2)^{2n}.$

4. Folosind metodele de calcul ale unor integrale reale cu ajutorul teoriei reziduurilor să se arate că

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \cdot \frac{\sin \omega x}{x} dx = \pi\Big(e^{-a\omega} - \frac{1}{2}\Big), \quad \omega > 0, \quad a > 0.$$

5. Să se arate că funcţia complexă $f(z) = \dfrac{1}{\sin \dfrac{1}{z}}$ are în punctul $z_0 = 0$ un punct singular esenţial neizolat.

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.30 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 30

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluţia ecuaţiei integrale

$$x(t) - \int_0^t \sinh 2(t-\tau)x(\tau)d\tau = e^{2t}.$$

Răspuns. $$x(t) = \frac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\sinh(\sqrt{6}t).$$

2. Să se studieze comportarea seriei de puteri

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}z^n.$$

Răspuns. Convergentă în toate punctele discului $|z| \leq 1$, cu excepţia lui $z = -1$.

3. Să se dezvolte în serie de puteri într–o vecinătate a punctului $z_0 = 1$ funcţia

$$f(z) = \frac{z(z^2+1) - 4(z^2-1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

şi să se precizeze apoi natura punctului z_0 pentru funcţia $f(z)$.

Indicaţie. Se descompune funcţia $f(z)$ în fracţii simple şi se pune în evidenţă binomul $(z-1)$.

Răspuns. $$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2^{n+1}} - 2\Big)(z-1)^n.$$

4. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}dx.$$

Răspuns. $$I = \frac{\pi}{2e^3}(1+e^2).$$

5. Să se determine funcţiile olomorfe $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ştiind că

$$u(x,y) = \varphi(x^2+y^2).$$

Răspuns. $$f(z) = C_1 + \ln(x^2+y^2) + i(C_2 + 2\text{arctg}\,\frac{y}{x}).$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.31 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 31

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluţia problemei lui Cauchy

$$x'' + 11x' + 30x = 72e^{3t}, \quad x(0+) = 1, \quad x'(0+) = -1.$$

Răspuns. $x(t) = e^{3t} + 4(e^{-6t} - e^{-5t}).$

2. Folosind teoria reziduurilor să se calculeze integrala

$$I = \int_{|z|=3} (1 + z + z^2)\Big(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\Big)dz.$$

Indicaţie. Se scrie I sub forma

$$I = \int_{|z|=3} (1 + z + z^2)e^{\frac{1}{z}}\,dz + \int_{|z|=3} (1 + z + z^2)e^{\frac{1}{z-1}}\,dz + \int_{|z|=3} (1 + z + z^2)e^{\frac{1}{z-2}}\,dz$$

şi se folosesc dezvoltările în serii Laurent corespunzătoare.

Răspuns. $I = 32\pi i.$

3. Să se reprezinte printr–o integrală Fourier funcţia

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{dacă} \quad |t| \le n\pi, \\ 0, & \text{dacă} \quad |t| > n\pi, \end{cases}$$

n fiind un număr natural.

Răspuns. $f(t) = \dfrac{2(-1)^n}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\sin(n\pi u)\sin(tu)}{u^2 - 1}du.$

4. Folosind transformarea "z", să se dtermine şirul $(x_n)_{n\ge 0}$ pentru care

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n, \quad n \ge 0 \quad \text{şi} \quad x_0 = 2x_1 = 2.$$

Răspuns. $x_n = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}3^n.$

5. Să se arate că $16\sinh^5 z = \sinh(5z) - 5\sinh(3z) + 10\sinh z.$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.32 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 32

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia diferenţială

$$x'' - 2x' + 2x = e^t \cos t$$

cu datele iniţiale $x(0+) = 1, x'(0+) = 1.$

Răspuns. $x(t) = \Big(\cos t + \dfrac{1}{2} t \sin t\Big) e^t.$

2. Să se arate că dezvoltarea în serie Taylor în jurul originii a funcţiei $\cos z$ este

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

3. Să se determine mulţimea de convergenţă a seriei de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(3n-2)2^n} (z-1+i)^n$$

şi să se reprezinte grafic discul de convergenţă.

Răspuns. Raza de convergenţă este $R = \dfrac{2}{3}.$

4. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integralele

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

Răspuns. $I_1 = I_2 = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}.$

5. Folosind dezvoltarea în jurul punctului de la infinit a funcţiei de integrat să se arate că

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^n - 1} = \begin{cases} 2\pi i, & \text{pentru} \quad n = 1 \\ 0, & \text{pentru} \quad n \neq 1. \end{cases}$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.33 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 33

1. Folosind transformarea Laplace să se găsească soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia $x''-2x'+10x=0$ cu condiţiile iniţiale $x(0+)=1,\ x'(0+)=4.$

   Răspuns. $x=e^t(\sin 3t+\cos 3t)$

2. Să se determine constantele reale a şi b astfel încât funcţia

$$f(z)=(\cosh y+a\sinh y)\cos x+i(\cosh y+b\sinh y)\sin x$$

   să fie olomorfă în întreg planul complex la distanţă finită şi apoi să se calculeze $f'(z).$

   Răspuns. $a=b=-1$ şi $f'(z)=ie^{iz}.$

3. Folosind transformarea Laplace să se găsească soluţia sistemului

$$\begin{cases} x(t)=e^t+\displaystyle\int_0^t x(\tau)d\tau-\int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau,\\ y(t)=-t-\displaystyle\int_0^t (t-\tau)x(\tau)d\tau+\int_0^t y(\tau)d\tau. \end{cases}$$

   Răspuns. $x(t)=e^{2t},\quad y(t)=\dfrac{1}{2}\Big(1-e^{2t}\Big).$

4. Folosind forma trigonometrică a numerelor complexe să se arate că

$$\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3}+i)^2}{1+i}}=\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\frac{\pi}{12}+2k\pi}{3}+\sin\frac{\frac{\pi}{12}+2k\pi}{3}\Big),\quad k=0,1,2.$$

5. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala

$$I=\int_0^{2\pi}\cos(n\theta-\sin\theta)e^{\cos\theta}d\theta.$$

   Răspuns. $I=2\pi e.$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.34 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 34

1. Să se rezolve ecuaţia integrală

$$2\int_0^{+\infty} g(u)\sin tu du = \begin{cases} \pi\sin t, & \text{pentru} \quad t\in(0,\pi) \\ 0, & \text{pentru} \quad t\geq\pi; \end{cases}$$

Răspuns. $g(u) = \dfrac{\sin\pi\, u}{1-u^2}.$

2. Studiind existenţa limitei raportului incrementar să se arate că funcţia

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, \quad f(z)=z^2$$

este monogenă în orice punct $z\in\mathbb{C}$ şi $f'(z)=2z$.

3. Să se determine punctele singulare la distanţă finită ale funcţiei

$$f(z)=\frac{z^8+1}{(z^2+4)^3}$$

şi să se precizeze comportarea ei în punctul de la infinit. Ţinând cont de această comportare să se calculeze integrala $\int_\Gamma f(z)dz$, unde curba Γ are ecuaţia $|z|=R$, cu $R>2$.

Răspuns. $I=0.$

4. Să se calculeze integrala curbilinie $I=\displaystyle\int_{C_r}\frac{dz}{z-z_0}$, unde curba C_r este cercul de rază r cu centrul în punctul z_0 parcurs în sens trigonometric. Să se regăsească rezultatul folosind formulele integrale ale lui Cauchy şi, separat, teorema reziduurilor.

Răspuns. $I=2\pi i.$

5. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala improprie

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+x+3}{x^4+13x^2+36}dx.$$

Răspuns. $I=\dfrac{2\pi}{5}.$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.35 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 35

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluţia problemei cu valori iniţiale

$$x'' - 3x' + 2x = (3t-2)e^t, \quad x(0+) = 1, \quad x'(0+) = 1.$$

Răspuns. $$x(t) = e^{2t} - \frac{1}{2}(3t^2+2t)e^t.$$

2. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ştiind că:

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2xy - x; \quad f(0) = i.$$

Indicaţie: Se folosesc condiţiile Cauchy–Riemann şi independenţa de drum a unei integrale curbilinii şi se găseşte Pentru a pune în evidenţă variabila z se face $y = 0$ şi se trece x în z.

Răspuns. $$f(z) = z^3 - iz^2 - z + i.$$

3. Să se dezvolte în serie Taylor funcţia $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ în vecinătatea punctului $z_0 = 1$.

Răspuns. $$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin{(n+1)\frac{\pi}{4}}}{2^{\frac{n+1}{2}}}(z-1)^n, \quad |z-1| < \sqrt{2}.$$

4. Să se determine reziduurile funcţiei $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^n}$, unde $n > 1$ este un număr natural. Să se calculeze $I = \displaystyle\int_C f(z)dz$, unde C este o curbă oarecare închisă care nu trece prin punctele i şi $-i$.

Răspuns. $$\text{Rez}\,[f(z), z_1 = i] = -i\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2} = -\text{Rez}\,[f(z), z_2 = -i].$$

5. Folosind transformarea Fourier să se determine funcţia $f(t)$ care verifică ecuaţia

$$\int_0^{\infty} f(t)\sin tx dt = e^{-x}, \;\; x > 0.$$

Răspuns. $$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x}\sin tx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{t}{1+t^2}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.36 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 36

1. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ştiind că:

$$v(x,y) = (x\sin y + y\cos y)e^x; \quad f(0) = 0.$$

Răspuns. $f(z) = ze^z.$

2. Să se determine reziduurile funcţiei în punctele singulare de la distanţă finită inclusiv în $z = \infty$

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}.$$

Răspuns. $\text{rez}[f(z), z_1] = 1$; $\text{rez}[f(z), z_2] = -\dfrac{1}{2}$; $\text{rez}[f(z), z_3] = -\dfrac{1}{2}.$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integralele

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta} d\theta, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta} d\theta.$$

Indicaţie. Integralele se determină simultan considerând

$$I_1 + iI_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n}{1 + a^2 - 2a\cos\theta} d\theta$$

în care se efectuează schimbarea de variabilă $z = e^{i\theta}$.

Răspuns. $I_1 = \dfrac{2\pi a^n}{1 - a^2}$, $I_2 = 0.$

4. Să se găsească regiunile planului complex în care au loc, pe rând, relaţiile:

$$a) \quad |z| + \text{Re}\, z \le 1; \quad |z| - \overline{z} = \frac{1}{2} + i.$$

5. Să se calculeze transformata Laplace $F(p)$ a funcţiei original

$$f(t) = \int_0^t e^{-u} \frac{\sin u}{u} du.$$

Răspuns. $F(p) = \dfrac{1}{p}\Big(\dfrac{\pi}{2} - \text{arctg}\,(p+1)\Big).$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

Matematici speciale

1.37 Lucrarea de verificare a cunoştinţelor nr. 37

1. Se consideră funcţiile original $f(t) = \sin t$ şi $g(t) = \cos t$. Să se determine convoluţia $f * g$ în două moduri:
   – calculând direct integrala care defineşte convoluţia $(f * g)(t)$;
   – aplicând transformarea Laplace convoluţiei.

   Răspuns. $(f * g)(t) = \frac{1}{2} t \sin t,\ t \geq 0.$

2. Să se determine funcţia complexă $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, unde $z = x + iy$, ştiind că:

$$u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{(1 + x)^2 + y^2}; \quad f(1) = 0.$$

   Să se scrie $f(z)$ şi derivata $f'(z)$ în funcţie de variabila z.

   Răspuns. $f(z) = \frac{1 - z}{1 + z},\ \ f'(z) = -\frac{2}{(1 + z)^2}.$

3. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia f de perioadă 2π

$$f(x) = \begin{cases} x, & \textit{pentru} \quad 0 \leq x < \pi \\ 0, & \textit{pentru} \quad -\pi < x < 0. \end{cases}$$

   Răspuns. $a_0 = \frac{\pi}{4},\ a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi},\ b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$

4. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_{|z|=3} \frac{1}{z^3 (z^2 - 1)(z - 4)} dz.$$

   Răspuns. $I = -\frac{\pi i}{480}.$

5. Să se pună în evidenţă partea principală a seriei Laurent pentru funcţia $f(z) = \frac{z}{(z + 3)^2}$ în vecinătatea punctului $z_0 = -3$. Să se deducă din această dezvoltare natura punctului singular $z_0 = -3$ şi să se stabilească $\text{Rez}\ [f, -3]$. Să se dea valoarea integralei $I = \int_{|z+3|=R} f(z) dz$, pentru orice R.

   Răspuns. $\text{Rez}\ [f, -3] = 1$ şi $I = 2\pi i.$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obţinut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.